

# 低频引力波波形模板介绍\*

杨舒程<sup>1,2</sup>, 韩文标<sup>1,2</sup>

1. 中国科学院上海天文台, 上海 200030
2. 中国科学院大学天文与空间科学学院, 北京 100049

**摘要:** 引力波的探测和参数估计依赖于匹配滤波技术。而匹配滤波需要大量理论计算的引力波波形, 称为波形模板。空间引力波探测器主要探测低频引力波, 这些信号的持续时间长, 从几天到几年不等, 对理论波形的精度要求高; 同时一些低频波源的构型复杂, 往往带有大偏心率和轨道进动, 使得波形参数空间很大, 需要的模板数量巨大。因此对于空间引力波探测, 多数波形模板在计算精度和效率上的要求要比地面引力波探测更高。本文回顾了低频引力波的一些主要波源 (超大质量双黑洞、极端质量比旋近、河内致密双星) 的波形模板研究, 总结了这些模板的特点, 展望了低频引力波天文学研究的未来。

**关键词:** 低频引力波; 匹配滤波; 数据处理

**中图分类号:** O412 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2021) 01-0099-13

## Introduction of templates for low-frequency gravitational waves

YANG Shucheng<sup>1,2</sup>, HAN Wenbiao<sup>1,2</sup>

1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China
2. School of Astronomy and Space Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract:** Matched filtering is critical in the detection and parameter estimation of gravitational waves (GWs). The application of matched filtering requires waveform templates, which are lots of GW waveforms from theoretical calculations. Space-borne GW detectors aim at low-frequency GWs. These signals have long timescales, ranging from several days to several years, and require theoretical waveforms with high accuracy. Moreover, some low-frequency GW sources have complicated configurations, such as large eccentricities and precession, which leads to a large parameter space of waveforms, and numerous templates are required. Therefore, comparing with ground-based GW detection, space-borne GW detection requires more efficiency and quality for most waveform templates. In this paper, we first review some waveform templates of primary low-frequency GW sources (supermassive binary black holes, extreme-mass-ratio inspirals, and compact binary stars in the Galaxy). Then we summarize the characteristics of these templates and look into the future of the research for low-frequency GW astronomy.

**Key words:** low-frequency gravitational waves; matched filtering; data processing

\* 收稿日期: 2020-11-06 录用日期: 2020-11-17 网络首发日期: 2021-01-15

基金项目: 国家自然科学基金 (11773059); 中国科学院前沿科学重点研究项目 (QYZDB-SSW-SYS016)

作者简介: 杨舒程 (1993年生), 男; 研究方向: 引力波天文学; E-mail: ysc@shao.ac.cn

通信作者: 韩文标 (1980年生), 男; 研究方向: 引力波天文学; E-mail: wbhan@shao.ac.cn

## 1 引言

2016年2月11日, LIGO团队宣布探测到了双黑洞并合的引力波信号<sup>[1]</sup>, 开启了观测宇宙的新窗口。截止2019年, LIGO-Virgo团队已经公布了10例双黑洞并合事件、一例双中子星并合事件<sup>[2]</sup>。2019年4月开始的O3观测也将探测更多的信号, 地面引力波探测已经进入“新常态”。LIGO地面引力波探测的成功, 激励中国、美国、欧盟和日本等多个国家和地区积极开展空间引力波探测计划, 包括欧盟和美国主导的LISA计划<sup>[3]</sup>, 中国主导的天琴<sup>[4]</sup>和太极计划<sup>[5]</sup>。欧空局于2015年发射了LISA的先期验证项目, 由于运行结果良好<sup>[6]</sup>, LISA团队后续L3项目的申请获得批准。与此同时, 为加快引力波探测和研究进程, 我国主导的天琴和太极计划也在加速筹建中。地面引力波探测和空间引力波探测的区别在于探测频段。LIGO等地面引力波探测器主要探测频率为数十到数百赫兹的高频引力波, 而空间引力波探测器则探测低频引力波。如天琴计划, 其引力波探测器臂长约为 $10^5$  km, 瞄准了频率在0.1 mHz到1 Hz的低频引力波信号<sup>[4]</sup>。

空间引力波探测波段有非常丰富的波源, 其中主要的波源有3类。①超大质量、中等质量双黑洞。②极端或中等质量比旋近系统, 极端质量比旋近系统<sup>[7]</sup> (extreme-mass-ratio inspirals, EMRIs) 由恒星质量致密天体(黑洞、中子星、白矮星等)绕转超大质量黑洞( $10^6 \sim 10^9 M_{\odot}$ ,  $M_{\odot}$ 表示一个太阳质量)构成, 中等质量比旋近系统<sup>[8]</sup> (intermediate-mass-ratio inspirals, IMRIs) 由恒星质量致密天体绕转中等质量黑洞 ( $10^3 \sim 10^5 M_{\odot}$ ) 或中等质量黑洞绕转超大质量黑洞组成。③数量巨大的河内致密双星, 其轨道周期在分钟-小时量级, 随引力波辐射的演化极其缓慢, 可以看作一个单频的波源。当然, 还可能存在一些人类尚未得知、没有理论模型的波源, 有待空间引力波探测器来发现。

空间引力波探测极有可能带来物理学、天文学的重大变革, 科学意义非常重大。一方面, 空间引力波探测器可以观测到高红移下的双黑洞并合事件, 给我们提供了独特的早期宇宙观测窗口。以天琴为例, 图1为天琴噪声及其典型引力波波源引力波信号的功率谱密度。如图1所示, 对于双黑洞并合的引力波信号, 即使其红移达到20, 天琴仍然能获得较高的信噪比。空间引力波探测器对于高红移的超大、中等质量黑洞并合事件的探测,

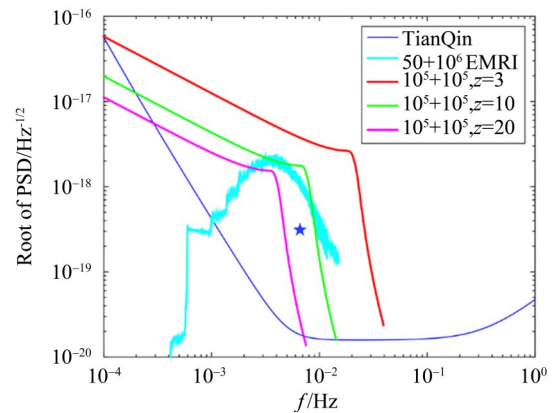


图1 天琴噪声及其典型引力波波源

引力波信号功率谱密度 (PSD, Power Spectrum Density)

蓝色代表天琴噪声的 PSD, 天蓝色曲线为

由 $10^6 M_{\odot}$  的黑洞和 $50 M_{\odot}$  的绕转天体组成的 EMRI 引力波(一年观测)的 PSD, EMRI 系统的光度距离为 1 Gpc。红色、绿色、紫色曲线分别为红移  $z$  为 3、10、20 的双黑洞并合引力波的 PSD, 组成双星系统的黑洞质量均为  $10^5 M_{\odot}$ 。

Fig. 1 The PSD (power spectrum density) of the noise and the typical GW signal for TianQin

Blue line is the PSD of TianQin GW detector's noise.

Cyan line is the PSD of GW signals (one-year observation)

for an EMRI system, which consists of an  $10^6 M_{\odot}$

black hole and a  $50 M_{\odot}$  rotating body. Red line, green line and purple line are PSDs of GW signals for binary black hole with the redshifts of 3, 10, 20, respectively, and the component black holes have the same mass of  $10^5 M_{\odot}$ .

使得我们能够对宇宙早期黑洞形成和并合的历史进行研究。另一方面, 空间引力波探测器对 EMRI/IMRI 系统的观测, 有助于研究超大、中等质量黑洞及绕转致密星的性质, 还可以用于检验引力理论。在空间探测器敏感频段, EMRI 和 IMRI 系统演化的时标相对较长<sup>[9]</sup>, 空间引力波探测器能够对其进行长时间观测, 所以引力波信号的信噪比就大大提高, 如图1所示, 光度距离为 1 Gpc 的 EMRI 在累积一年观测后, 获得的信噪比相当可观。由于 EMRI/IMRI 引力波信号的信噪比较高, 其引力波波能精确提取, 系统的物理性质和演化过程也就能精确了解, 在这样的条件下, 引力理论也能得到较高度度的检验。

由于引力波极其微弱, 引力波天文学经常采用匹配滤波技术<sup>[10]</sup> (Matched Filtering), 即利用海量的高精度引力波“模板”来从引力波数据中挖掘出引力波信号, 同时估计波源的各项物理参数。波形模板由引力理论计算而得到。致密双星是引

力波探测器主要的引力波波源。目前对致密双星引力波模板的研究也相对较多。而致密双星并合的问题是一个二体问题。二体问题在牛顿力学下有解析解, 而广义相对论下的二体问题没有解析解。因此人们往往对广义相对论进行近似来计算致密双星的引力波模板。如图 2 所示, 目前对于致密双星而言, 计算波形模板的主要方法有 3 种, 即后牛顿近似方法、数值相对论以及微扰方法, 分别适用不同情形的引力波波源系统。当双星之间的距离比较远时, 例如河内致密双星的旋近阶段, 系统是弱引力场系统, 往往利用后牛顿近似方法来计算波形模板。当双星之间的距离比较近, 且双星质量比相当时, 如河内致密双星的并合阶段, 系统为极端相对论系统, 一般而言后牛顿近似方法不再适用, 数值相对论方法应运而生。2005 年 Pretorius<sup>[11]</sup> 解决了数值相对论的稳定性问题后, 人们研究出了大量的双黑洞、黑洞-中子星、中子星-中子星并合的引力波模板用于 LIGO 的引力波探测。比如由等效单体理论<sup>[12-13]</sup> (EOB, Effective-One-Body), 一种经过数值相对论和黑洞微扰校准的后牛顿方法, 建立的时域波形模板 SEOBNR 系列<sup>[14]</sup>; 以数值相对论模型为标准建立的频域唯像模板 Phenom 系列<sup>[15]</sup> 和 IMRPhenomP 系列<sup>[16-18]</sup> 等。但对于双星质量比较大的 EMRI/IMRI 系统 (质量比约  $10^3 \sim 10^7$ ), 目前数值相对论也无能为力。目前有报道的大质量比双星数值相对论的最好计算结果, 仍然是 2011 年给出的仅仅一周半轨道的质量比为 1:100 的双星并合<sup>[19]</sup>。目前对于 EMRI/IMRI 系统, 人们利用微扰理论来计算引力波模板。

未来空间引力波探测对 EMRI/IMRI 的引力波模板的要求很高, 无论在模板的计算精度还是在计算效率上。如果精度不够, 由于 EMRI/IMRI 系

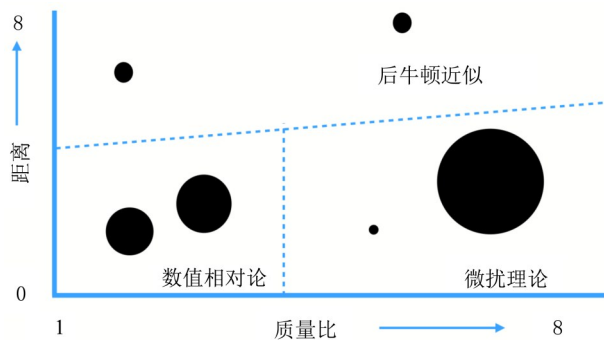


图 2 根据系统的质量比、距离远近, 适用的计算方法不同

Fig. 2 The applicable calculation methods are different for systems with different mass ratios and distances

统演化的时标长, 微小的模板误差会导致无法忽略的相位误差 (dephase), 从而导致信号提取失败<sup>[20-21]</sup>。EMRI/IMRI 系统的轨道往往带有大偏心率 and 轨道倾角, 绕转天体在强引力区域绕转中心黑洞约几千到几十万周期。因此对模板数量的需求激增。Gair 等<sup>[20]</sup> 针对 LISA 项目做过估计, 即使在圆轨道等理想化条件的假设下, EMRI 的模板数量也高达  $10^{40}$  个。因此模板计算效率不够就无法适应空间引力波数据的处理。目前数值方法一般用作参考样本, 校准或者构建更加高效的波形生成方法。未来空间引力波探测仍需要更高精度、更高效率的引力波模板计算方法。本文将就超大质量双黑洞、EMRI 以及河内致密双星的引力波模板做详细介绍。主要内容安排如下, 在第二节, 我们将讨论超大质量双黑洞的引力波波形模板, 第三节主要讨论 EMRI 的波形模板, 在第四节讨论致密双星的波形模板。最后一节我们进行总结。

## 2 超大质量双黑洞

超大质量双黑洞 ( $10^5 \sim 10^9 M_{\odot}$ ) 是空间引力波探测器的重要波源之一。超大质量黑洞普遍存在于星系的中心, 两个星系中心的黑洞相互绕转可以经过漫长的时间。假定两个黑洞质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ , 总质量为  $M$ , 当两者相互绕转的频率为  $\omega_{\text{orbit}}$ , 其辐射的引力波频率为  $f_0 = 2\omega_{\text{orbit}}$ , 那么从  $f_0$  到达黑洞并合前的绕转时间约为 (由二阶后牛顿计算得出)<sup>[22]</sup>

$$T_{\text{chirp}} = \frac{5}{256\eta} \frac{GM}{c^3} \left\{ \nu^{-8} + \left( \frac{743}{252} + \frac{11}{3}\eta \right) \nu^{-6} - \frac{32}{5} \pi \nu^{-5} + \left( \frac{3058673}{508032} + \frac{5429}{504}\eta + \frac{617}{72}\eta^2 \right) \nu^{-4} \right\}, \quad (1)$$

其中

$$\nu = \left( \frac{GM}{c^3} \pi f_0 \right)^{1/3}. \quad (2)$$

双黑洞相互绕转辐射引力波的最大频率一般认为最内稳定圆轨道 (Innermost stable circular orbit, ISCO) 下的频率。如不考虑黑洞的自旋, 则其 ISCO 轨道半径为

$$r_{\text{ISCO}} = \frac{6GM}{c^2}, \quad (3)$$

对应频率为

$$f_{\text{ISCO}} = \frac{c^3}{6\sqrt{6} \pi GM}, \quad (4)$$

其中  $G$  为万有引力常数,  $c$  为光速,  $M$  为黑洞质量。图 3 展示了 SEOBNR 波形模板<sup>[14]</sup> 下不同质量的超

大质量双黑洞发出的引力波在探测阶段（引力波频率从  $10^{-3}$  Hz 起至最终并合）持续的时长及双黑洞并合时的引力波频率，可见其时标从  $10^3 \sim 10^6$  s 不等，并合频率也位于空间引力波探测器的敏感波段。

与 LIGO 目前探测到的多数引力波源类似，超大质量双黑洞也属于相当质量比的致密双星。一般而言，对于相当质量比的致密双星，不考虑自旋时，其引力波的时域（time-domain）波形可以简单描述为

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{4}{D} \left( \frac{GM}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\pi f}{c} \right)^{2/3} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos \Phi(t), \\ h_\times(t) &= \frac{4}{D} \left( \frac{GM}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\pi f}{c} \right)^{2/3} \cos^2 \iota \sin \Phi(t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$M = (m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5}$$

为啁啾质量（chirp mass）， $D$  为光源的光度距离， $\iota$  是致密天体角动量方向与视线方向的夹角。频域（frequency-domain）下的引力波波形可以简单描述为<sup>[22]</sup>

$$\tilde{h}(f) = - \left( \frac{5\pi}{24} \right)^{1/2} \left( \frac{GM}{c^3} \right) \left( \frac{GM}{c^2 D_{\text{eff}}} \right) \left( \frac{GM}{c^3} \pi f \right)^{-7/6} e^{i\Psi(f)}. \quad (6)$$

通过稳相位近似（stationary phase approximation）得到的相位  $\Psi(f)$  为

$$\begin{aligned} \Psi(f) &= 2\pi f t_0 - 2\phi_0 - \pi/4 \\ &+ \frac{3}{128\eta} \left[ v^{-5} + \left( \frac{3715}{756} + \frac{55}{9} \eta \right) v^{-3} - 16\pi v^{-2} \right. \\ &\left. + \left( \frac{15293365}{508032} + \frac{27145}{504} \eta + \frac{3085}{72} \eta^2 \right) v^{-1} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

有效距离  $D_{\text{eff}}$ （effective distance）为

$$D_{\text{eff}} = D \left[ \left( \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right)^2 F_+^2(\alpha, \delta, \psi) + \cos^2 \iota F_\times^2(\alpha, \delta, \psi) \right]^{-1/2}, \quad (8)$$

其中  $\eta = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$ ， $F_+$ ,  $F_\times$  分别为引力波探测器对引力波 +,  $\times$  偏振的响应函数，相应函数取决于波源的空间位置  $(\alpha, \delta)$  和偏振角  $\psi$ 。而探测器实际测量到的引力波信号为

$$h = F_+(\alpha, \delta, \psi) h_+ + F_\times(\alpha, \delta, \psi) h_\times. \quad (9)$$

以上简单介绍了致密双星在旋近（inspiral）阶段的二阶后牛顿近似下的引力波波形，更高阶后牛顿波形已经有很多的计算，不同后牛顿波形的比较可以参考 Buonanno 等<sup>[23]</sup>的工作。对致密双星所产生的引力波信号，其并合（merger）和铃宕（ringdown）阶段对数据的分析也有重要意义，在这两个阶段，数值相对论波形计算耗时，后牛顿近似下的波形又不精确，不能满足对于引力波数据分析的需要，所以就需建立生成波形与实际波形比较吻合，且生成波形效率高的替代方案。

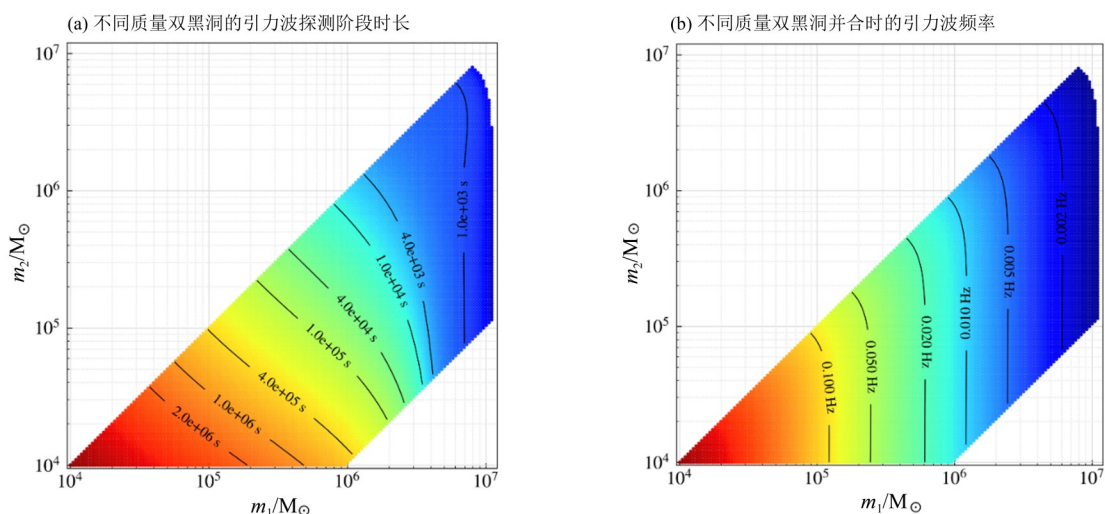


图 3 不同质量超大质量双黑洞的引力波的探测阶段（引力波频率从  $10^{-3}$  Hz 起至最终并合）持续的时长及双黑洞并合时的引力波频率（使用 SEOBNR 模板估计得到）

Fig. 3 The timespans of detection stage (from  $f_{\text{CW}} = 10^{-3}$  Hz to merge) and merge frequencies of gravitational waves of binary black holes in different masses (Estimated by SEOBNR templates)

目前有两种主要途径建立包含旋近、并合、铃宕 (inspiral-merger-ringdown, IMR) 3 个阶段的致密双星引力波波形<sup>[24]</sup>。

方案一, 通过有效单体方法来建立引力波波形, 最早由 Buonanno 和 Damour 引入<sup>[12-13]</sup>。EOB 将后牛顿的结果推广到强引力场范畴, 并使用半解析的方式描述并合和铃宕阶段。将致密双星的后牛顿动力学图像映射成一个测试粒子在一个变形的 Kerr 度规下绕转的过程, Kerr 度规形变的大小取决于双星的对称质量比  $\nu$  (symmetric mass ratio,  $\nu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$ )。使用重求和后牛顿形式, 可构造旋近和速降阶段的波形<sup>[25-27]</sup>。为了改进与数值相对论波形的匹配度, EOB 哈密顿量中加入了高阶后牛顿项来进行调节。同时也加入了一些附加项, 以此来改进并合阶段的波形。铃宕阶段的信号则使用并合后致密天体的准正规模 (quasi-normal mode, QNM) 的线性叠加来描述<sup>[28-29]</sup>。现有 EOB 模型依赖于数值相对论的模拟结果<sup>[30-36]</sup>来建立可靠的波形。目前 EOB 已经发展出不含自旋的波形<sup>[30, 37]</sup>, 自旋与轨道角动量平行的波形<sup>[38-40]</sup>, 及带有进动的波形<sup>[41]</sup>。这几种不同的波形的主要区别在与所考虑的后牛顿项和校准时所使用的数值相对论波形不同。

方案二, 利用唯象方法 (phenomenological approach) 建立波形, 这种方法专注于快速构建频域的引力波波形, 服务于引力波数据分析。唯象模型最先在 Ajith 等和 Pan 等<sup>[42-43]</sup>的工作中被引入, 其用于描述无自旋的波形。它基于 IMR 引力波信号在频域振幅和相位的唯象拟设, 通常是将旋近部分进行推延。推延的方程形式依赖于数值相对论的模拟结果, 有一系列自由参数可供调节, 以期优化所产生波形与数值相对论波形的匹配度。频域唯象波形可被写为<sup>[42]</sup>

$$u(f) \equiv \mathcal{A}_{\text{eff}}(f) e^{i\Psi_{\text{eff}}(f)}, \quad (10)$$

其中  $\mathcal{A}_{\text{eff}}(f)$  是频域振幅, 可以用一系列振幅参数  $\alpha = \{f_{\text{merg}}, f_{\text{ring}}, f_{\text{cut}}, \sigma\}$  来表示为

$$\mathcal{A}_{\text{eff}}(f) \equiv \begin{cases} (ff_{\text{merg}})^{-7/6}, & f < f_{\text{merg}}, \\ (ff_{\text{merg}})^{-2/3}, & f_{\text{merg}} \leq f < f_{\text{ring}}, \\ wL(f, f_{\text{ring}}, \sigma), & f_{\text{ring}} \leq f < f_{\text{cut}}, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$L(f, f_{\text{ring}}, \sigma) = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \frac{\sigma}{(f - f_{\text{ring}})^2 + \sigma^2/4} \quad (12)$$

表示 Lorentzian 函数以  $f_{\text{ring}}$  为中心, 以  $\sigma$  为宽度。归一化常数  $w$  用来调节  $\mathcal{A}_{\text{eff}}(f)$  在  $f_{\text{ring}}$  的连续性。 $f_{\text{cut}}$  为波形的截止频率,  $f_{\text{merg}}$  是指数关系从  $f^{-7/6}$  到  $f^{-2/3}$  的频率。波形的有效相位 (effective phase)  $\Psi_{\text{eff}}(f)$  被表述为频率  $f$  的指数展开,

$$\Psi_{\text{eff}}(f) = 2\pi f t_0 + \phi_0 + \psi_0 f^{-5/3} + \psi_2 f^{-1} + \psi_3 f^{-2/3} + \psi_4 f^{-1/3} + \psi_6 f^{1/3}, \quad (13)$$

其中  $t_0$  是到达时间,  $\phi_0$  是频域相位偏置,  $\beta = \{\psi_0, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_6\}$  是一系列描述相位的唯象参数, 被称为相位参数 (phase parameters)。唯象模型已发展出无自旋及自旋与轨道角动量平行的波形<sup>[17-18, 42-45]</sup>。对于带进动的波形, 由于数值相对论缺少相应的波形, 因此目前很难实现对其的直接唯象拟设。一种可能的解决方式是把与轨道角动量平行的自旋随时间变换到进动轨道平面, 以此产生带进动的波形<sup>[16, 46-47]</sup>。

值得注意的是, 通过这两种方式计算引力波波形时, 对致密双星的质量比有一定限制, 例如 Taracchini 等<sup>[14]</sup>发展的 EOB 波形可通过质量比在 1~8 的数值相对论波形 SXS:BBH:305<sup>[48]</sup>进行校准, 超出这个质量比范围, 波形的准确度将变差。

### 3 极端质量比旋近

极端质量比旋近系统 (extreme-mass-ratio inspirals, EMRIs) 是指致密双星质量比超过  $10^4$ , 并随着引力辐射平均轨道半径逐渐衰减的系统, 是引力波天文学中一类很重要的源, 术语极端质量比旋近有时也用来指代质量较小的绕转天体的轨道<sup>[8]</sup>。EMRI 产生的 mHz 波段的引力波可以利用空间引力波探测器进行探测。而这样的引力波源很有可能位于星系中心。大量观测表明在大多数星系的中心可能存在超大质量黑洞 ( $10^6 \sim 10^9 M_{\odot}$ ), 其周围 10 光年分布有  $10^7 \sim 10^8$  颗星组成的星系核 (nucleus)<sup>[49]</sup>。超大质量黑洞周围天体的轨道不断受到星系核内引力的作用, 不断改变着轨道。当一个天体 (如恒星级黑洞、中子星或白矮星) 十分靠近中心超大质量黑洞时, 引力辐射反作用在绕转天体的轨道改正中占主导作用, 显著地影响了该绕转天体的轨道, 在一定条件下就会形成一个 EMRI 系统<sup>[8, 49]</sup>。所以绕转天体不太可能是一个大质量恒星, 因为它会被中心大质量黑洞的潮汐力所撕碎<sup>[49]</sup>。而如果绕转天体太过靠近, 它就会直接掉入中心大质量黑洞的事件视界, 这会激起一个短时的剧烈的引力波暴, 但很难被当前规划

的空间引力波探测器所探测到<sup>[8]</sup>。所以 EMRI 的形成, 需要绕转天体在太过接近或太过远离中心大质量黑洞之间取得平衡。根据目前的估计<sup>[8]</sup>, 一个质量为  $10^6 M_{\odot}$  的大质量黑洞, 每  $10^6 \sim 10^8$  年会形成一个 EMRI 系统。所以在银河系中不太可能观测到这样的系统。然而空间引力波探测器能够在宇宙尺度上探测 EMRI 事件, 并预计能达到每年探测到数十到数千个引力波事件的探测率<sup>[8]</sup>。大多数 EMRI 在形成之初往往具有非常大的偏心率 ( $e > 0.99$ ), 此时亦可能产生可探测的引力波, 即当绕转天体通过近点时, 引力波强度相对较大, 形成一个短的引力波脉冲, 即所谓极端质量比爆发<sup>[50]</sup> (extreme mass ratio bursts)。随着引力波不断辐射, EMRI 的轨道半径不断缩小, 轨道偏心率也逐渐降低, 因此引力波强度、频率也逐渐变大, 当其产生的引力波到达空间引力波探测器的敏感波段时, 离心率通常在 0.7 左右<sup>[8]</sup>。

EMRI 信号中蕴藏着大量的天体物理信息。由于 EMRI 演化得相对较慢, 在进入可探测阶段后, 绕转天体还需要绕转许多 (约  $10^4$ ) 圈才能完成并合<sup>[7]</sup>。因此超大质量黑洞周围精确的时空几何信息就隐藏在 EMRI 系统辐射的引力波之中<sup>[51]</sup>。所以对 EMRI 信号的观测, 可以在较强引力场下对广义相对论的预测进行高精度的检验<sup>[52]</sup>。此外, 对 EMRI 系统的观测可以估计系统的一系列参数<sup>[53]</sup>, 包括中心黑洞的质量、角动量和四级矩, 以及绕转天体的质量, 绕转天体轨道的偏心率和轨道倾角等, 可用于探讨中心黑洞的性质<sup>[8]</sup>。

以上科学目标实现的前提是, 在空间引力波探测器的数据中识别出 EMRI 的引力波信号。对于 EMRI, 绕转天体相对于中心超大质量黑洞的赤道面同时具有轨道倾角和轨道偏心率, 使得其产生的引力波是 3 种基准频率的复杂叠加。要在空间引力波探测器的数据中, 搜寻依赖于 14 个不同的参数和  $10^5$  次周期的海量波形并不容易<sup>[54]</sup>。为此 LISA 曾经组织过数次数据挑战赛来探讨对空间引力波探测器进行数据分析的可行性<sup>[55-59]</sup>。通过实践证明, 在给定较窄的先验值的情况下, 识别单个 EMRI 的引力波信号是可行的<sup>[57-60]</sup>。而成功的方法主要利用蒙特卡洛-马尔可夫技术随机搜索参数空间, 寻找最合适的参数值<sup>[54]</sup>。

对于 EMRI 引力波的数据处理需构建引力波模板库, 并且要兼顾精确度和速度, 以在探测器噪声中迅速识别引力波信号。而高精度的模板则需

要对 EMRI 系统进行精确地建模。用解析方法求解广义相对论下的运动方程是很困难的, 实际的求解过程往往利用了近似。致密绕转天体的质量相对中心大质量黑洞要小很多, 在一定条件下, 其产生的引力场可以忽略, 可以用扰动的方式处理<sup>[61]</sup>。如图 2 所示, 当绕转天体离中心黑洞较远时, 在致密双星的建模中经常使用后牛顿近似的方法, 这种方法将运动方程按照  $v/c$  进行展开, 在弱场、低速情形下是一种很好的近似。后牛顿方法对于相当质量比的致密双星, 直到其并合前轨道的最后几个周期都是适用的。但对于 EMRI, 其并合前的多数轨道周期都不适用后牛顿方法<sup>[8]</sup>。另一种方法是数值求解广义相对论计算出运动方程, 由于引力理论的非线性, 这种方法较为困难且计算消耗较大, 相当质量比的致密双星其演化末期周期数较少适合用这种方法, 但 EMRI 需要精确求解的大量周期使得这种方法在计算方面相当昂贵, 不适合产生大量的引力波波形<sup>[8]</sup>。

EMRI 建模的另外一种方法是基于中心大质量黑洞的引力场的微扰理论。EMRI 由于其质量比较大, 可以将运动方程按质量比的倒数进行展开。在最终求得的运动方程解中, 零阶项即超大质量黑洞形成的克尔时空下的测地线, 而由于绕转天体有限的质量而产生的修正, 则可以按照阶数次序依次引入, 可以视作对绕转天体的一种等效力, 即引力自力<sup>[8]</sup>。在本世纪, 对于 EMRI 的引力自力方面的研究取得了许多进展。目前的数值方法可以计算史瓦西黑洞周围任意轨道的引力自力<sup>[62]</sup>。在计算旋转的克尔黑洞周围的引力自力方面也取得了一些进展<sup>[63]</sup>。但为了在超过  $10^5$  次周期中精确追踪相位, 引力模板要求计算展开到二阶的引力自力。虽然已有理论计算已经给出结果<sup>[64]</sup>, 但目前还没有在引力波波形模板中得到应用。

目前, 国内外有一些研究团队能够对大质量比旋近双星 (EMRI/IMRI) 进行高精度数值模拟。主要有美国麻省理工学院的 Hughes 团队、马塞诸塞大学的 Khanna 团队、德国耶拿大学的研究组以及日本的数个研究团队 (如 Tagoshi、Fujita 等)。国内目前主要有中国科学院上海天文台的研究人员开展了系列研究工作, 完整建立了进行黑洞微扰数值计算的软件, 能对大质量比旋近系统的动力学和引力波进行高精度数值模拟。在计算波形模板方面目前已有较为精确的基于 Teukolsky 方程的方法<sup>[65-69]</sup>, 通过求解 Teukolsky 方程<sup>[70]</sup>来得到

引力波波形。这种方法基于频域分解, 并已得到一定发展<sup>[66-68, 71]</sup>。一个总质量为  $M$  的带有偏心率的 EMRI, 若其光度距离为  $R$ , 极角为  $\Theta$ , 方位角为  $\Phi$  那么该系统产生的引力波其波形可以写作 (在几何单位制  $G = c = 1$  下)

$$h_+ - ih_\times = \frac{2}{R} \sum_{lmk} \frac{Z_{lmk}^H}{\omega_{mk}^2} {}_{-2}S_{lmk}^{a\omega}(\Theta) e^{-i\phi_{mk} + im\Phi}, \quad (14)$$

其中  $l, m, k$  是谐波数,  $\phi_{mk} = \int \omega_{mk}(t) dt$ ,  ${}_{-2}S_{lmk}^{a\omega}(\Theta)$  表示自旋加权的球谐系数, 其依赖于极角  $\Theta$  (观测者视线方向和波源系统角动量之间的夹角),  $Z_{lmk}^H$  通过求解径向 Teukolsky 方程得到, 表示每一个模的振幅。 $\omega_{mk}$  形式为

$$\omega_{mk} = m\Omega_\phi + k\Omega_r, \quad (15)$$

这里  $\Omega_r$  and  $\Omega_\phi$  分别表示  $r$  和  $\phi$  方向的轨道频率, 可通过 EOB 动力学计算得到<sup>[68, 71-72]</sup>。

但基于 Teukolsky 方法的波形模板相对而言计算消耗依然比较大, 不适用于引力波搜寻。一些近似方法, 比如 Analytic Kludge (AK)<sup>[53]</sup>, Numerical Kludge (NK)<sup>[73]</sup>, 使得计算得到大量相对精确的波形变得可行。其中 AK 模型<sup>[53]</sup> 基于开普勒轨道的四极辐射<sup>[74]</sup>, 并在其之上强加了一些相对论效应如近心点和轨道平面的进动, 并考虑了引力辐射反作用下轨道参数的演化。优点是生成波形的速度快, 但是它和 EMRI 的引力波波形匹配得并不是特别好, 并不适用于空间引力波探测器的数据分析<sup>[54]</sup>。NK 模型基于精确的克尔黑洞测地线来构建 EMRI 的轨道, 其参数演化是基于后牛顿展开并拟合到微扰理论的计算之中<sup>[75]</sup>。通过将克尔时空的 Boyer-Lindquist 坐标转换为平坦空间的球坐标, 最终计算出轨道及其对应的波形。NK 模型<sup>[73]</sup> 生成的波形与基于 Teukolsky 方程的模型<sup>[76-77]</sup> 生成的波形之间的匹配得很好, 并且能够很容易地引入额外的物理效应, 比如演化的保守改正<sup>[78]</sup> 或者对作用在轨道上的力的改正<sup>[79-80]</sup>。但 NK 模型比 AK 模型计算消耗更大<sup>[54]</sup>。而后来又有人提出了 augmented analytic kludge<sup>[54, 81]</sup>, 即 AAK 模型, 其将 AK 模型的参数来映射 NK 波形的频率, 利用 NK 模型的信息提高了 AK 模型的精确度, 但保留了 AK 模型计算效率高的优点。AAK 模型比 AK 模型更接近真实的物理信号, 提升了在空间引力波数据中提取引力波信号的敏感度和精确度, 为接下来利用微扰波形模板对提取出的信号进行更精确的参数估计铺平了道路<sup>[54]</sup>。

目前一般假设中心大质量黑洞产生的时空满

足克尔度规, 而在非克尔框架下 EMRI 的波形模板方面, 基于 Teukolsky 方程的 XSPEG 模型<sup>[82]</sup> 对此做了一些尝试, 该模型使用了一种参数化的轴对称黑洞度规框架<sup>[83]</sup> (以下称 KRZ 度规), 其形式为

$$ds^2 = -\frac{N^2(\tilde{r}, \theta) - W^2(\tilde{r}, \theta) \sin^2 \theta}{K^2(\tilde{r}, \theta)} dt^2 - 2W(\tilde{r}, \theta) \tilde{r} \sin^2 \theta dt d\phi + K^2(\tilde{r}, \theta) \tilde{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \Sigma(\tilde{r}, \theta) \left( \frac{B^2(\tilde{r}, \theta)}{\tilde{r}^2 N^2(\tilde{r}, \theta)} d\tilde{r}^2 + d\theta^2 \right), \quad (16)$$

这里  $\tilde{r} = r/M, \tilde{a} = a/M, \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ , 同时  $K(\tilde{r}, \theta), N(\tilde{r}, \theta), W(\tilde{r}, \theta), B(\tilde{r}, \theta)$  可展开成  $\cos \theta$  的幂级数

$$N^2 = (1 - r_0/\tilde{r}) \left[ 1 - \epsilon_0 r_0/\tilde{r} + (k_{00} - \epsilon_0) r_0^2/\tilde{r}^2 + \delta_1 r_0^3/\tilde{r}^3 \right] + \{ a_{20} r_0^3/\tilde{r}^3 + a_{21} r_0^4/\tilde{r}^4 + k_{21} r_0^3/\tilde{r}^3 \cdot \left[ 1 + \frac{k_{22}(1 - r_0/\tilde{r})}{1 + k_{23}(1 - r_0/\tilde{r})} \right]^{-1} \} \cos^2 \theta, \quad (17)$$

$$B = 1 + \delta_4 r_0^2/\tilde{r}^2 + \delta_5 r_0^2 \cos^2 \theta/\tilde{r}^2, \quad (18)$$

$$W = [w_{00} r_0^2/\tilde{r}^2 + \delta_2 r_0^3/\tilde{r}^3 + \delta_3 r_0^3/\tilde{r}^3 \cos^2 \theta]/\Sigma, \quad (19)$$

$$K^2 = 1 + aW/r + \{ k_{00} r_0^2/\tilde{r}^2 + k_{21} r_0^3/\tilde{r}^3 \cdot \left[ 1 + \frac{k_{22}(1 - r_0/\tilde{r})}{1 + k_{23}(1 - r_0/\tilde{r})} \right]^{-1} \} \cos^2 \theta, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} r_0 &= 1 + \sqrt{1 - \tilde{a}^2}, \quad a_{20} = 2\tilde{a}^2 r_0^3, \\ a_{21} &= -\tilde{a}^4 r_0^4 + \delta_6, \quad \epsilon_0 = (2 - r_0)/r_0, \\ k_{00} &= \tilde{a}^2 r_0^2, \quad k_{21} = \tilde{a}^4 r_0^4 - 2\tilde{a}^2 r_0^3 - \delta_6, \\ w_{00} &= 2\tilde{a} r_0^2, \quad k_{22} = -\tilde{a}^2 r_0^2 + \delta_7, \\ k_{23} &= \tilde{a}^2 r_0^2 + \delta_8. \end{aligned} \quad (21)$$

形变参数  $\delta_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  控制了 KRZ 度规与克尔度规的差异, 当  $\delta_i (i = 1, 2, \dots, 8) = 0$  时, KRZ 度规就退化到了克尔度规。XSPEG 模型对基于 Teukolsky 方程的引力波波形模板进行了修正, 得到了非克尔框架下的引力波波形。并发现在大多数情况下, 非克尔的引力波波形可以通过调整克尔框架下波形的参数来模拟, 但只要考虑轨道演化, 在实际的引力波数据分析中可很容易辨别出非克尔的引力波。

综上, EMRI 系统是空间引力波探测器的重要引力波源。但要识别出 EMRI 的引力波信号, 需要精度好、计算效率高的波形模板。现有模型很多

没有考虑绕转天体的自旋和多极矩、在大偏心率轨道下精度也不够高,同时计算效率比较低。EMRI建模中的一些其他特性如瞬态谐振<sup>[84-85]</sup>也仍待研究。这些问题都需要得到解决,以适应未来的空间引力波探测。

#### 4 河内致密双星

银河系中有着数量极其庞大的致密双星系统,这些河内致密双星主要由白矮星组成,但也包括中子星和恒星级黑洞。河内致密双星的轨道周期如果在几分钟到数小时,则它们发出的引力波恰好落在空间引力波探测器的敏感波段。由于此时

双星相距较远,轨道因为引力辐射造成的衰减非常缓慢,因此会发出连续且接近单频的引力波信号<sup>[86]</sup>(见图4)。通过引力波信号,可以高精度地测量双星的轨道周期,即 $P_{\text{orb}} = 2/f_{\text{GW}}$ 。辐射高频引力波的河内致密双星通常比辐射低频引力波的河内致密双星的信号更强,自然更容易被识别和参数估计。河内致密双星的数量很多,大量较弱的致密双星的引力波,有可能掩盖或者干扰其他的波源,成为引力波背景辐射。目前已经确认一些双白矮星系统,未来可对它们进行引力波和电磁波的多信使观测。LISA估计能探测到约25 000个河内致密双星<sup>[6]</sup>。

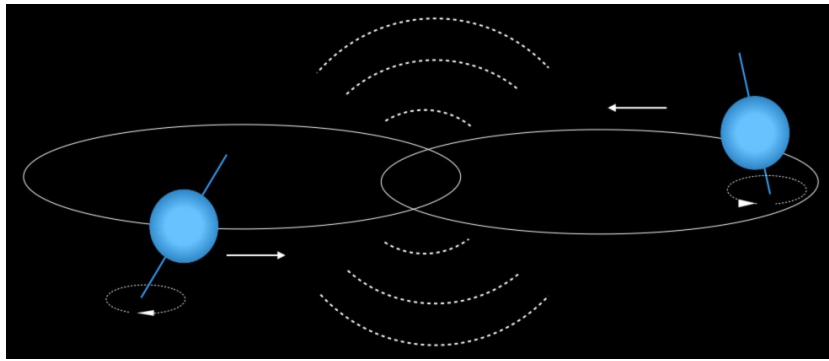


图4 致密双星系统辐射的单频引力波信号

Fig. 4 Single frequency gravitational wave signal radiated by compact binary system

不过,长期来看,致密双星的轨道频率还是缓慢变化的,仍然是一个旋近系统。双星在每个频段停留的时间不同。若已知轨道相位 $\phi$ ,则可以估算出在频率 $f$ 处产生的周期数为

$$N_{\text{cycles}} = \frac{f}{2\pi} \frac{d\phi}{df} = \frac{f^2}{\dot{f}}, \quad (22)$$

这里变量上面的点表示对时间求导,其中 $\dot{\phi} = 2\pi f$ 。信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)的平方和周期数 $N_{\text{cycles}}$ 成正比,这样大致有特征应变(Characteristic strain)  $h_c(f) \approx \sqrt{N_{\text{cycles}}} |\tilde{h}(f)|$ 。这里 $\tilde{h}(f)$ 是引力波时域信号 $h(t)$ 的傅立叶变换,即频域下的引力波信号。假设最简单的情况, $h(t) = \sqrt{2} h_0 \cos[\phi(t)]$ ,其中 $h_0$ 是一个常数振幅,则有

$$h_c(f) = \sqrt{\frac{2f^2}{\dot{f}}} h_0. \quad (23)$$

空间探测器对双星系统一年的观测大致有

$$h_c(f) = 5 \times 10^{-21} \left( \frac{f}{10^{-3} \text{Hz}} \right)^{-2/3}. \quad (24)$$

在实际情况下,双星系统的时域波形可能更复杂一些,其频率和振幅都在随时间变化,根据Peters的经典工作<sup>[87]</sup>,我们有

$$h_+(t) = A \cos \left[ 2\pi \left( f + \frac{1}{2} \dot{f} t \right) t + \phi_D(t) + \phi_0 \right] \left[ 1 + (\hat{L} \cdot \hat{n})^2 \right], \quad (25)$$

$$h_\times(t) = -2A \sin \left[ 2\pi \left( f + \frac{1}{2} \dot{f} t \right) t + \phi_D(t) + \phi_0 \right] (\hat{L} \cdot \hat{n}), \quad (26)$$

其中 $\hat{L}$ 表示双星轨道角动量的单位方向矢量, $\hat{n}$ 表示观测者视线方向的单位矢量。频率对时间的导数,可以从一阶后牛顿近似得到

$$\dot{f} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} f^{11/3} \mathcal{M}^2, \quad (27)$$

这里的 $\mathcal{M}$ 是系统的啁啾质量。而引力波的振幅为

$$A = \frac{5}{96\pi^2} \frac{\dot{f}}{f^3 D}. \quad (28)$$

$\phi_0$ 是一个积分常数,而 $\phi_D(t)$ 是空间引力波探测器围绕太阳或者地球运转产生的多普勒相位调制

$$\phi_D(t) = 2\pi f R \sin \theta_s \cos [\bar{\phi}(t) - \phi_s], \quad (29)$$

其中  $R$  是探测器距离太阳的距离,  $(\theta_s, \phi_s)$  是源的赤经赤纬,  $\bar{\phi}(t)$  是探测器的轨道相位。这样, 对于一个致密双星系统, 忽略它们的自旋和质量多极矩, 我们只需要 8 个参数就可以描述其波形, 即  $(A, f, \dot{f}, \phi_0, \theta_s, \phi_s, \theta_L, \phi_L)$ 。

## 5 总 结

空间引力波探测器主要探测低频引力波, 是探测高频引力波的地面引力波探测器的重要补充。我国正在积极推进空间引力波探测计划, 力争在空间引力波探测领域占据一席之地。空间引力波探测的波源非常丰富, 有星系尺度的超大质量双黑洞, EMRI/IMRI, 也有恒星尺度的河内致密双

星。其中, 超大质量双黑洞的引力波信号, 往往信噪比非常高, 其识别可能并不需要引力波模板, 但参数估计仍然需要模板才能进行。EMRI/IMRI、河内致密双星则是属于比较弱的波源, 虽然通过长时间观测可以积累不错的信噪比, 但其信号较弱, 可能掩盖在噪声中, 必须依赖匹配滤波技术与大量的波形模板进行比对, 才能挖掘出引力波信号并给出参数估计。超大质量双黑洞、河内致密双星的引力波波模板, 相对而言较为成熟。而 EMRI/IMRI 的波形模板至今为止仍然不太成熟, 而其参数空间又特别大, 所需波形模板的数量也极其巨大, 模板精度和计算效率的要求比较高。未来可能的发展方向是, 以精确的数值波形模板校准高效率的唯像波形模板, 最终得到适用于 EMRI/IMRI 引力波探测的波形模板。

## 参考文献:

- [1] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(6): 061102.
- [2] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al. GWTC-1: A gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by ligo and virgo during the first and second observing runs [J]. *Physical Review X*, 2019, 9(3): 031040.
- [3] DANZMANN K. THE LISA STUDY TEAM. LISA: Laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 1996, 13(11A): A247.
- [4] LUO J, CHEN L S, DUAN H Z, et al. Tianqin: A space-borne gravitational wave detector [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2016, 33(3): 035010.
- [5] HU W R, WU Y L. The taiji program in space for gravitational wave physics and the nature of gravity [J]. *National Science Review*, 2017, 4(5): 685-686.
- [6] DANZMANN K, AMARO-SEOANE P, AUDLEY H, et al. A proposal in response to the ESA call for L3 mission concepts [EB/OL]. (2017-02-23)[2020-11-18]. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1702/1702.00786.pdf>.
- [7] GLAMPEDAKIS K. Extreme mass ratio inspirals: LISA's unique probe of black hole gravity [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2005, 22(15): S605.
- [8] AMARO-SEOANE P, GAIR J R, FREITAG M, et al. Intermediate and extreme mass-ratio inspirals—astrophysics, science applications and detection using LISA [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2007, 24(17): R113.
- [9] HINDERER T, FLANAGAN E E. Two-timescale analysis of extreme mass ratio inspirals in Kerr spacetime: Orbital motion [J]. *Physical Review D*, 2008, 78(6): 064028.
- [10] FINN L S. Detection, measurement, and gravitational radiation [J]. *Physical Review D*, 1992, 46(12): 5236.
- [11] PRETORIUS F. Evolution of binary black-hole spacetimes [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(12): 121101.
- [12] BUONANNO A, DAMOUR T. Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics [J]. *Physical Review D*, 1999, 59(8): 084006.
- [13] BUONANNO A, DAMOUR T. Transition from inspiral to plunge in binary black hole coalescences [J]. *Physical Review D*, 2000, 62(6): 064015.
- [14] TARACCHINI A, BUONANNO A, PAN Y, et al. Ef-

- fective-one-body model for black-hole binaries with generic mass ratios and spins [J]. *Physical Review D*, 2014, 89(6): 061502.
- [15] PÜRRER M. Frequency-domain reduced order models for gravitational waves from aligned-spin compact binaries [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2014, 31(19): 195010.
- [16] HANNAM M, SCHMIDT P, BOHÉ A, et al. Simple model of complete precessing black-hole-binary gravitational waveforms [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(15): 151101.
- [17] HUSA S, KHAN S, HANNAM M, et al. Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. I. New numerical waveforms and anatomy of the signal [J]. *Physical Review D*, 2016, 93(4): 044006.
- [18] KHAN S, HUSA S, HANNAM M, et al. Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. II. A phenomenological model for the advanced detector era [J]. *Physical Review D*, 2016, 93(4): 044007.
- [19] LOUSTO C O, ZLOCHOWER Y. Orbital evolution of extreme-mass-ratio black-hole binaries with numerical relativity [EB/OL]. (2011-07-01) [2020-11-18]. <https://arxiv.org/pdf/1009.0292v2.pdf>.
- [20] GAIR J R, BARACK L, CREIGHTON T, et al. Event rate estimates for LISA extreme mass ratio capture sources [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2004, 21(20): S1595.
- [21] GLAMPEDAKIS K, HUGHES S A, KENNEFICK D. Approximating the inspiral of test bodies into Kerr black holes [J]. *Physical Review D*, 2002, 66(6): 064005.
- [22] ALLEN B, ANDERSON W G, BRADY P R, et al. FINDCHIRP: An algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries [J]. *Physical Review D*, 2012, 85(12): 122006.
- [23] BUONANNO A, IYER B R, OCHSNER E, et al. Comparison of post-Newtonian templates for compact binary inspiral signals in gravitational-wave detectors [J]. *Physical Review D*, 2009, 80(8): 084043.
- [24] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al. Effects of waveform model systematics on the interpretation of GW150914 [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2017, 34(10): 104002.
- [25] DAMOUR T, NAGAR A. Faithful effective-one-body waveforms of small-mass-ratio coalescing black hole binaries [J]. *Physical Review D*, 2007, 76(6): 064028.
- [26] DAMOUR T, IYER B R, NAGAR A. Improved resummation of post-Newtonian multipolar waveforms from circularized compact binaries [J]. *Physical Review D*, 2009, 79(6): 064004.
- [27] PAN Y, BUONANNO A, FUJITA R, et al. Post-Newtonian factorized multipolar waveforms for spinning, nonprecessing black-hole binaries [J]. *Physical Review D*, 2011, 83(6): 064003.
- [28] BERTI E, CARDOSO V, WILL C M. Gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA [J]. *Physical Review D*, 2006, 73(6): 064030.
- [29] LONDON L, SHOEMAKER D, HEALY J. Modeling ringdown: Beyond the fundamental quasinormal modes [J]. *Physical Review D*, 2014, 90(12): 124032.
- [30] DAMOUR T, NAGAR A, HANNAM M, et al. Accurate effective-one-body waveforms of inspiralling and coalescing black-hole binaries [J]. *Physical Review D*, 2008, 78(4): 044039.
- [31] MROUE A H, SCHEEL M A, SZILAGYI B, et al. Catalog of 174 binary black hole simulations for gravitational wave astronomy [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(24): 241104.
- [32] BOYLE M, BUONANNO A, KIDDER L E, et al. High-accuracy numerical simulation of black-hole binaries: Computation of the gravitational-wave energy flux and comparisons with post-Newtonian approximants [J]. *Physical Review D*, 2008, 78(10): 104020.
- [33] LOVELACE G, BOYLE M, SCHEEL M A, et al. High-accuracy gravitational waveforms for binary black hole mergers with nearly extremal spins [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2012, 29(4): 045003.

- [34] DAMOUR T, NAGAR A, POLLNEY D, et al. Energy versus angular momentum in black hole binaries [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(13): 131101.
- [35] BUCHMAN L T, PFEIFFER H P, SCHEEL M A, et al. Simulations of non-equal mass black hole binaries with spectral methods [J]. *Physical Review D*, 2012, 86: 084033.
- [36] NAGAR A, DAMOUR T, REISSWIG C, et al. Energetics and phasing of nonprecessing spinning coalescing black hole binaries [J]. *Physical Review D*, 2016, 93(4): 044046.
- [37] PAN Y, BUONANNO A, BOYLE M, et al. Inspiral-merger-ringdown multipolar waveforms of nonspinning black-hole binaries using the effective-one-body formalism [J]. *Physical Review D*, 2011, 84(12): 124052.
- [38] TARACCHINI A, PAN Y, BUONANNO A, et al. Prototype effective-one-body model for nonprecessing spinning inspiral-merger-ringdown waveforms [J]. *Physical Review D*, 2012, 86(2): 024011.
- [39] DAMOUR T, NAGAR A. New effective-one-body description of coalescing nonprecessing spinning black-hole binaries [J]. *Physical Review D*, 2014, 90(4): 044018.
- [40] BOHÉ A, SHAO L, TARACCHINI A, et al. Improved effective-one-body model of spinning, nonprecessing binary black holes for the era of gravitational-wave astrophysics with advanced detectors [J]. *Physical Review D*, 2017, 95(4): 044028.
- [41] PAN Y, BUONANNO A, TARACCHINI A, et al. Inspiral-merger-ringdown waveforms of spinning, precessing black-hole binaries in the effective-one-body formalism [J]. *Physical Review D*, 2014, 89(8): 084006.
- [42] AJITH P, BABAK S, CHEN Y, et al. A phenomenological template family for black-hole coalescence waveforms [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2007, 24(19): S689.
- [43] PAN Y, BUONANNO A, BAKER J G, et al. Data-analysis driven comparison of analytic and numerical coalescing binary waveforms: Nonspinning case [J]. *Physical Review D*, 2008, 77(2): 024014.
- [44] AJITH P, HANNAM M, HUSA S, et al. Inspiral-merger-ringdown waveforms for black-hole binaries with nonprecessing spins [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(24): 241101.
- [45] SANTAMARIA L, OHME F, AJITH P, et al. Matching post-Newtonian and numerical relativity waveforms: Systematic errors and a new phenomenological model for nonprecessing black hole binaries [J]. *Physical Review D*, 2010, 82(6): 064016.
- [46] SCHMIDT P, HANNAM M, HUSA S, et al. Tracking the precession of compact binaries from their gravitational-wave signal [J]. *Physical Review D*, 2011, 84(2): 024046.
- [47] SCHMIDT P, HANNAM M, HUSA S. Towards models of gravitational waveforms from generic binaries: A simple approximate mapping between precessing and nonprecessing inspiral signals [J]. *Physical Review D*, 2012, 86(10): 104063.
- [48] BOYLE M, HEMBERGER D, IOZZO D A B, et al. The SXS Collaboration catalog of binary black hole simulations [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2019, 36(19): 195006.
- [49] MERRITT D. Dynamics and evolution of galactic nuclei [M]. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2013.
- [50] BERRY C P L, GAIR J R. Observing the Galaxy's massive black hole with gravitational wave bursts [J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, 429(1): 589-612.
- [51] GAIR J R. The black hole symphony: probing new physics using gravitational waves [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2008, 366(1884): 4365-4379.
- [52] GAIR J R, VALLISNERI M, LARSON S L, et al. Testing general relativity with low-frequency, space-based gravitational-wave detectors [J]. *Living Reviews in Relativity*, 2013, 16(1): 7.
- [53] BARACK L, CUTLER C. LISA capture sources: Ap-

- proximate waveforms, signal-to-noise ratios, and parameter estimation accuracy [J]. *Physical Review D*, 2004, 69(8): 082005.
- [54] CHUA A J K, MOORE C J, GAIR J R. Augmented kludge waveforms for detecting extreme-mass-ratio inspirals [J]. *Physical Review D*, 2017, 96(4): 044005.
- [55] ARNAUD KA, BABAK S. An overview of the mock LISA data challenges [C]// *AIP Conference Proceedings*, 2006, 873: 619–624.
- [56] ARNAUD K A, AUGER G, BABAK S, et al. Report on the first round of the mock LISA data challenges [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2007, 24(19): S529.
- [57] BABAK S, BAKER J G, BENACQUISTA M J, et al. Report on the second mock LISA data challenge [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2008, 25(11): 114037.
- [58] BABAK S, BAKER J G, BENACQUISTA M J, et al. The mock LISA data challenges: from challenge 1b to challenge 3 [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2008, 25(18): 184026.
- [59] BABAK S, BAKER J G, BENACQUISTA M J, et al. The mock LISA data challenges: from challenge 3 to challenge 4 [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2010, 27(8): 084009.
- [60] BABAK S, GAIR J R, PORTER E K. An algorithm for the detection of extreme mass ratio inspirals in LISA data [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2009, 26(13): 135004.
- [61] BARACK L. Gravitational self-force in extreme mass-ratio inspirals [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2009, 26(21): 213001.
- [62] BARACK L, SAGO N. Gravitational self-force on a particle in circular orbit around a Schwarzschild black hole [J]. *Physical Review D*, 2007, 75(6): 064021.
- [63] WARBURTON N, BARACK L. Self-force on a scalar charge in Kerr spacetime: Eccentric equatorial orbits [J]. *Physical Review D*, 2011, 83(12): 124038.
- [64] POUND A. Second-order perturbation theory: problems on large scales [J]. *Physical Review D*, 2015, 92(10): 104047.
- [65] HARTL M D, BUONANNO A. Dynamics of precessing binary black holes using the post-Newtonian approximation [J]. *Physical Review D*, 2005, 71(2): 024027.
- [66] HAN W B. Gravitational radiation from a spinning compact object around a supermassive Kerr black hole in circular orbit [J]. *Physical Review D*, 2010, 82(8): 084013.
- [67] HAN W B, CAO Z J. Constructing effective one-body dynamics with numerical energy flux for intermediate-mass-ratio inspirals [J]. *Physical Review D*, 2011, 84(4): 044014.
- [68] HAN W B. Gravitational waves from extreme-mass-ratio inspirals in equatorially eccentric orbits [J]. *International Journal of Modern Physics D*, 2014, 23(7): 1450064.
- [69] HAN W B. Fast evolution and waveform generator for extreme-mass-ratio inspirals in equatorial-circular orbits [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2016, 33(6): 065009.
- [70] TEUKOLSKY S A. Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations [J]. *The Astrophysical Journal*, 1973, 185: 635–648.
- [71] HAN W B, CAO Z J, HU Y M. Excitation of high frequency voices from intermediate-mass-ratio inspirals with large eccentricity [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2017, 34(22): 225010.
- [72] CAO Z J, HAN W B. Waveform model for an eccentric binary black hole based on the effective-one-body-numerical-relativity formalism [J]. *Physical Review D*, 2017, 96(4): 044028.
- [73] BABAK S, FANG H, GAIR J R, et al. “Kludge” gravitational waveforms for a test-body orbiting a Kerr black hole [J]. *Physical Review D*, 2007, 75(2): 024005.
- [74] PETERS P C, MATHEWS J. Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit [J]. *Physical Review*, 1963, 131(1): 435.
- [75] GAIR J R, GLAMPEDAKIS K. Improved approximate

- inspirals of test bodies into Kerr black holes [J]. *Physical Review D*, 2006, 73(6): 064037.
- [76] HUGHES S A. Evolution of circular, nonequatorial orbits of Kerr black holes due to gravitational-wave emission. II. Inspiral trajectories and gravitational waveforms [J]. *Physical Review D*, 2001, 64(6): 064004.
- [77] DRASCO S, HUGHES S A. Gravitational wave snapshots of generic extreme mass ratio inspirals [J]. *Physical Review D*, 2006, 73(2): 024027.
- [78] HUERTA E A, GAIR J R. Influence of conservative corrections on parameter estimation for extreme-mass-ratio inspirals [J]. *Physical Review D*, 2009, 79(8): 084021.
- [79] GAIR J R, FLANAGAN E E, DRASCO S, et al. Forced motion near black holes [J]. *Physical Review D*, 2011, 83(4): 044037.
- [80] WARBURTON N, AKCAY S, BARACK L, et al. Evolution of inspiral orbits around a Schwarzschild black hole [J]. *Physical Review D*, 2012, 85(6): 061501.
- [81] CHUA A J K, GAIR J R. Improved analytic extreme-mass-ratio inspiral model for scoping out eLISA data analysis [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2015, 32(23): 232002.
- [82] XIN S, HAN W B, YANG S C. Gravitational waves from extreme-mass-ratio inspirals using general parametrized metrics [J]. *Physical Review D*, 2019, 100(8): 084055.
- [83] KONOPLYA R, REZZOLLA L, ZHIDENKO A. General parametrization of axisymmetric black holes in metric theories of gravity [J]. *Physical Review D*, 2016, 93(6): 064015.
- [84] BERRY C P L, COLE R H, CANIZARES P, et al. Importance of transient resonances in extreme-mass-ratio inspirals [J]. *Physical Review D*, 2016, 94(12): 124042.
- [85] FLANAGAN E E, HINDERER T. Transient resonances in the inspirals of point particles into black holes [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(7): 071102.
- [86] NELEMANS G, YUNGELSON L R, ZWART S F P. The gravitational wave signal from the Galactic disk population of binaries containing two compact objects [J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2001, 375(3): 890-898.
- [87] PETERS P C. Gravitational radiation and the motion of two point masses [J]. *Physical Review*, 1964, 136(4B): B1224.

(责任编辑 秦社彩)